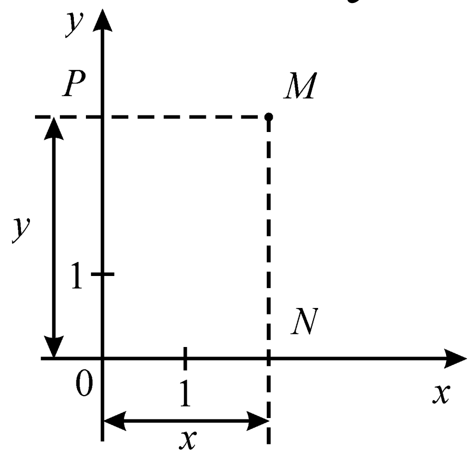
Аналитическая геометрия на плоскости

Основные задачи метода координат

Прямоугольная система координат

Определение: Прямоугольной (декартовой) системой координат на плоскости называется две взаимно перпендикулярные оси Ox и Oy, имеющие общее начало O и одинаковую масштабную единицу.



Ox называется *осью абсцисс*, Oy – *осью ординат*. Из произвольной точки M опустим перпендикуляры на оси Ox и Oy.

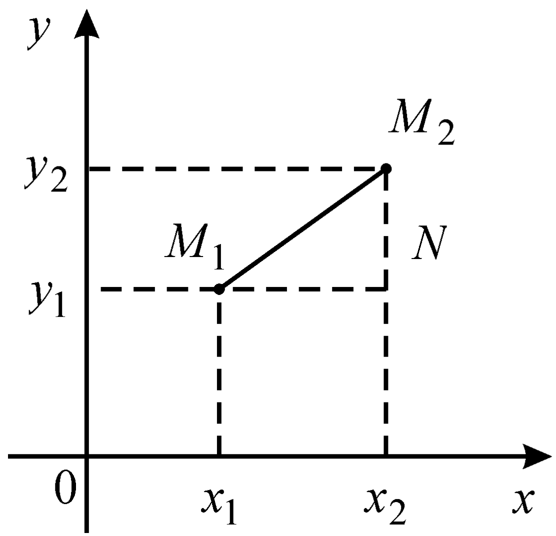
Число x называется абсциссой, y – ординатой точки M. Упорядоченная пара $(x;\ y)$ называется координатами точки M.

Каждой точке на плоскости в прямоугольной системе координат соответствует единственная пара действительных чисел $(x;\ y)$.

Метод определения положения точек на плоскости с помощью чисел называется *методом координат*.

Расстояние от точки $M(x;\ y)$ до начала координат определяется по формуле:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$



Теорема: Для любых двух точек $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ на плоскости расстояние между ними выражается формулой:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (2)$$

Пример: Даны точки $M_1(-2;1)$, $M_2(1;-3)$. Найти расстояние между этими точками.

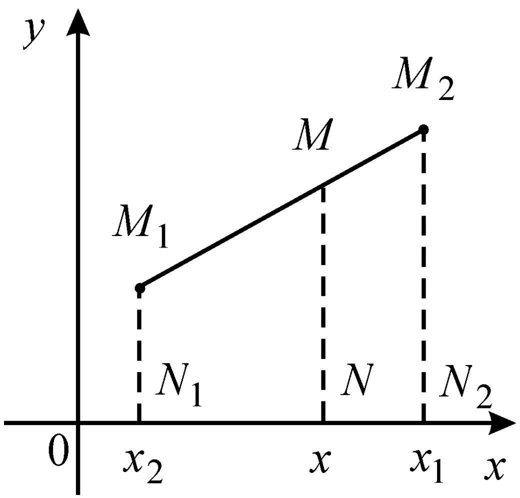
Решение:

Используя формулу (2) получим:

$$d = |M_1M_2| = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть на плоскости дан произвольный отрезок M_1M_2 и пусть M – любая точка, принадлежащая этому отрезку.



$$\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} \qquad (3)$$

Определение: Число $\lambda>0$, определяемое равенством (3), называется отношением в котором точка M делит отрезок M_1M_2 .

Задача о делении отрезка в данном отношении состоит в том, чтобы по данному отношению λ и координатам точек M_1 и M_2 найти координаты точки M.

Теорема: Если точка M делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (4)$$

где $(x_1; y_1)$ – координаты точки M_1,

$(x_2; y_2)$ – координаты точки M_2.

Следствие: Если точка M делит отрезок M_1M_2 пополам, то есть $|M_1M| = |MM_2|$ $(\lambda = 1)$, то координаты этой точки определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (5)$$

Пример: Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. Найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2.

Решение:

Искомая точка делит отрезок в отношении $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

Применяя формулы (4), получим:

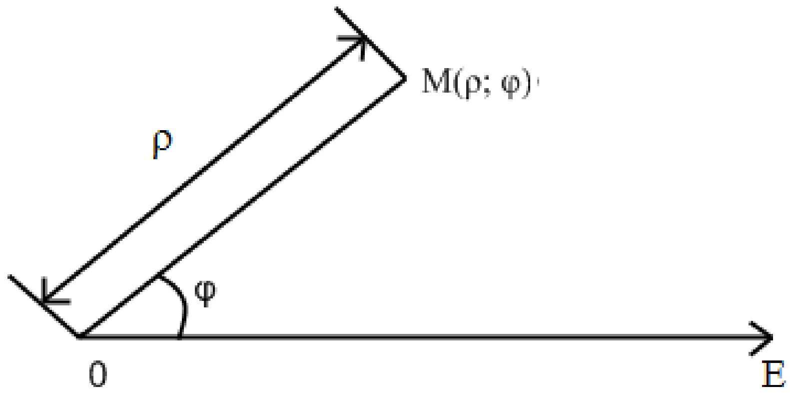
$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 7}{1 + \frac{1}{2}} = 3; \qquad y = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = 2.$$

Следовательно, $M(3;\ 2)$.

Полярная система координат

Полярная система координат состоит из точки O, называемой полюсом, и исходящего из него луча OE, полярной оси.

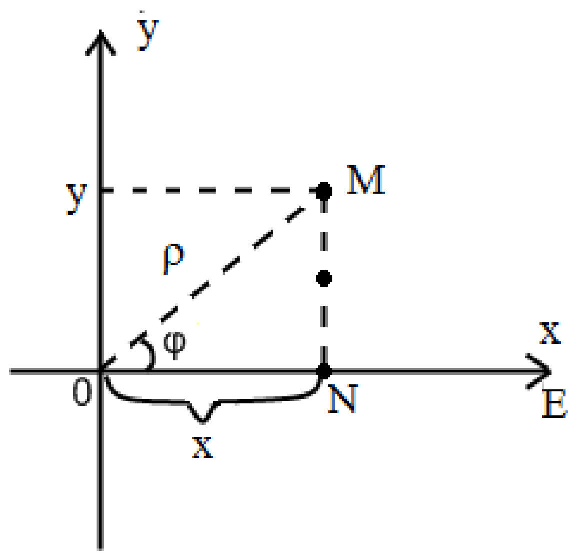
Кроме того задается единица масштаба для измерения длин отрезков.



Полярными координатами точки M называют числа ρ и φ.

Установим связь между прямоугольными и полярными координатами точки.

Для этого совместим начало прямоугольной и полярной систем координат, а ось Ox направим по направлению полярной оси OE. Пусть точка M имеет прямоугольные координаты $(x;\, y)$, полярные $(\rho;\, \varphi)$.



Тогда из прямоугольного треугольника *ONM* получим:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6)$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (7)$$

(6) - выражает прямоугольные координаты через полярные.

(7) - выражает полярные координаты через прямоугольные.

Пример: Найти полярные координаты точки $M\left(2\sqrt{3};-2\right)$

Решение:

Воспользуемся формулами (7):

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{4\cdot3+4}=\sqrt{16}=4,$$

$$tg\varphi=\frac{y}{x}=\frac{-2}{2\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Так как точка лежит в четвертой четверти, то угол выбираем исходя из этого условия: $\varphi=-\frac{\pi}{6}$ или $\varphi=\frac{11\pi}{6}$,

то есть $M\left(4;-\frac{\pi}{6}\right)$ или $M\left(4;\frac{11\pi}{6}\right)$.

Пример: Найти прямоугольные координаты точки

$$M\left(3;\frac{3\pi}{4}\right).$$

Решение:

Воспользуемся формулами (6):

$$x=\rho\cos\varphi=3\cdot\cos\frac{3\pi}{4}=3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$y=\rho\sin\varphi=3\cdot\sin\frac{3\pi}{4}=3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Таким образом, прямоугольные координаты данной точки имеют вид:

$$M\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

Уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

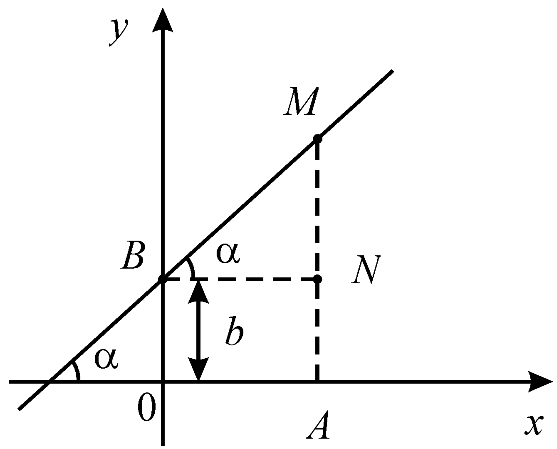
Определение: Углом наклона прямой, образованным с положительным направлением оси Ox называется наименьший угол α, на который нужно повернуть положительное направление оси Ox против хода часовой стрелки для совмещения ее с прямой.

Определение: Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла наклона прямой: $k = tg\alpha$. (1)

Если $\alpha = 0$, то прямая параллельна оси Ox и $k = 0$.

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то прямая перпендикулярна оси Ox и говорят, что угловой коэффициент обращается в ∞.

Выведем уравнение прямой, если ее положение определено величиной отрезка $|OB| = b$, отсекаемого на оси Oy и угловым коэффициентом $k = tg\alpha$.



Пусть $M(x; y)$ – текущая точка искомой прямой.

Опустим перпендикуляр из точки M на ось Ox и через точку B проведем прямую, параллельно оси Ox.

Рассмотрим прямоугольный треугольник: ΔBNM.

Из треугольника: $tg\alpha = \dfrac{|MN|}{|BN|}$, $|MN| = |BN| \cdot tg\alpha$, но

$$tg\alpha = k, \quad |MN| = y - b, \quad |BN| = x \quad \Rightarrow \quad y - b = kx$$

$$y = kx + b \qquad (2)$$

(2) – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

При $k > 0$ прямая образует с осью Ox острый угол, при $k < 0$ – тупой, при $k = 0$ прямая параллельна оси Ox.

При $b > 0$ прямая пересекает ось Oy выше начала координат , при $b < 0$ – ниже, при $b = 0$ проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении

Выведем уравнение прямой, если ее положение определяется данной точкой $M_1(x_1;\, y_1)$ и заданным угловым коэффициентом $k = tg\alpha$.

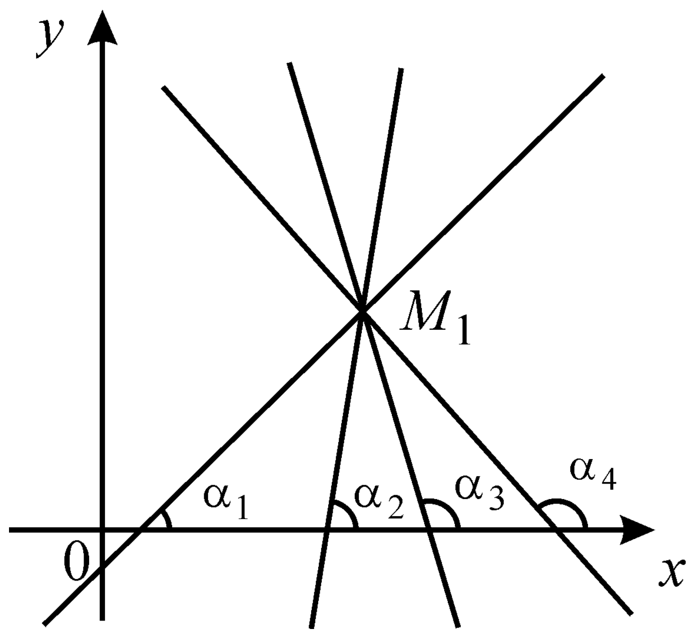
Запишем уравнение прямой в виде $y = kx + b$, где b – неизвестное число.

Так как прямая проходит через точку $M_1(x_1;\, y_1)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению: $y_1 = kx_1 + b$.

Отсюда $b = y_1 - kx_1$, подставляя в уравнение получим: $y = kx + y_1 - kx_1$ или $y - y_1 = k\left(x - x_1\right)$ (3)

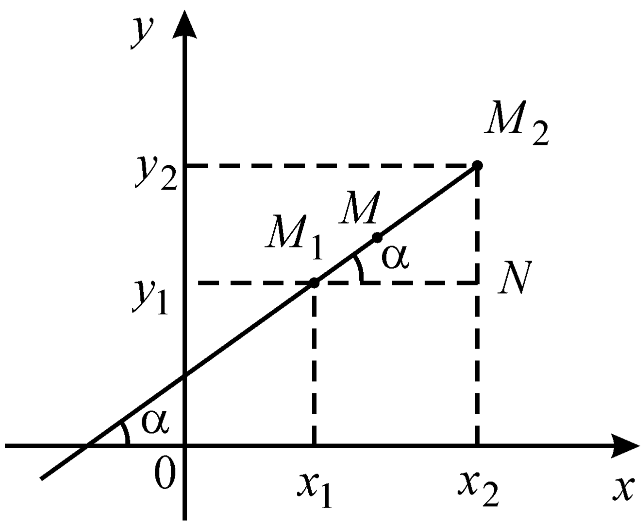
(3) – уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении.

Изменяя угловой коэффициент k (направление прямой), через данную точку $M_1(x_1;\ y_1)$ можно провести множество прямых. Поэтому уравнение (3) называют уравнением пучка прямых.



Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть положение прямой определяется двумя данными точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$.



Запишем уравнение прямой в виде: $y - y_1 = k(x - x_1)$,

где k – неизвестное число.

Но прямая проходит через точку $M_2(x_2;\ y_2)$. Следовательно, координаты этой точки также удовлетворяют уравнению: $y_2 - y_1 = k\left(x_2 - x_1\right)$.

Откуда $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Подставим найденный коэффициент в уравнение пучка прямых: $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x - x_1\right).$$

Перегруппируем левую правую часть и получим:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

(4) – уравнение прямой проходящей через две данные точки.

Если $x_1=x_2$, то уравнение прямой имеет вид: $x=x_1$, и прямая параллельна оси Oy.

Если $y_1=y_2$, то уравнение прямой имеет вид: $y=y_1$, и прямая параллельна оси Ox.

Пример: Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;\,3)$ и $M_2(3;\,-1)$.

Решение:

Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{y-3}{-1-3}=\frac{x-2}{3-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-3}{-4}=\frac{x-2}{1}$$

Разрешим полученное уравнение относительно y:

$$y-3=-4(x-2) \quad \Rightarrow \quad y-3=-4x+8$$

или $y=-4x+11.$

Пример: Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;4)$ и $M_2(3;-7)$.

Решение:

Воспользуемся формулой (4):

$$\frac{y-4}{-7-4}=\frac{x-3}{3-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-4}{-11}=\frac{x-3}{0}$$

На ноль делить нельзя, но можно воспользоваться свойством пропорции:

$$(y-4)\cdot 0=-11\cdot(x-3) \quad \Rightarrow \quad x-3=0 \quad \text{или} \quad x=3.$$

В данном примере $x_1=x_2=3,$ поэтому можно было сразу записать уравнение прямой в виде: $x=3.$

Общее уравнение прямой

Теорема: В прямоугольной системе координат любая прямая задается уравнением первой степени:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (5)$$

где A и B одновременно не обращаются в ноль.

(5) называют общим уравнением прямой, так как данное уравнение охватывает все случае положения прямой на плоскости.

Из него можно получить другие уравнения прямой.

Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0,$ при условии, что все коэффициенты отличны от нуля.

Преобразуем его, для этого свободное слагаемое перенесем в правую часть и поделим левую и правую часть на $-C$:

$$Ax + By = -C,$$

$$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\left(-\frac{C}{A}\right)}x + \frac{1}{\left(-\frac{C}{B}\right)}y = 1.$$

Введем обозначение: $a = -\dfrac{C}{A}, \quad b = -\dfrac{C}{B}.$

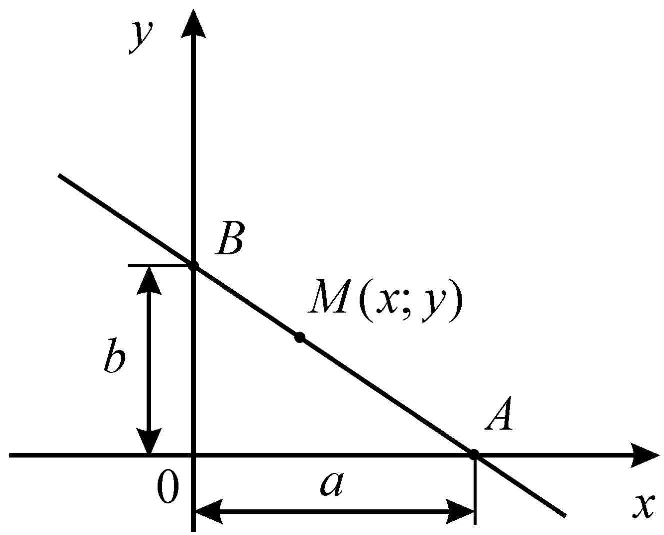
Тогда уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (6)$$

(6) – уравнение прямой «в отрезках».

Замечание: в виде уравнения (6) не могут быть записаны уравнение прямой, проходящей через начало координат и уравнения прямых, параллельных осям координат.

Геометрический смысл уравнения (6) состоит в том, что числа a и b являются величинами отрезков, которые прямая отсекает на соответствующих осях координат.



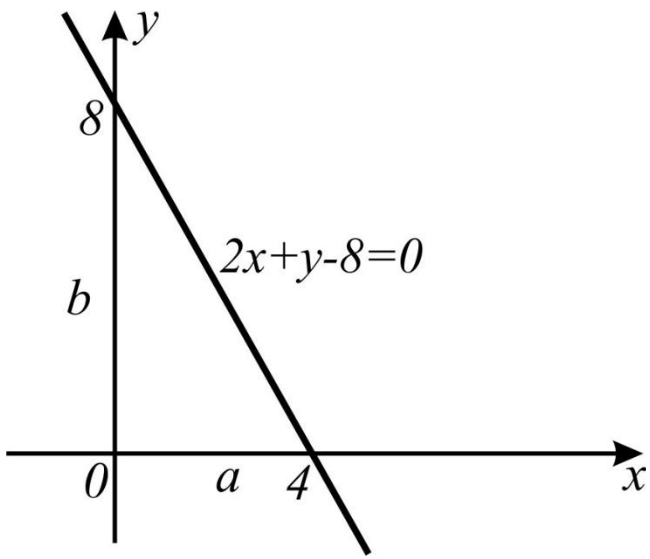
Эта форма уравнения удобна для геометрического построения прямой.

Пример: Прямая задана уравнением $2x + y - 8 = 0.$

По данному уравнению прямой составить уравнение прямой «в отрезках» и построить прямую.

Решение:

Преобразуем уравнение прямой: $2x + y = 8,\quad \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} = 1.$



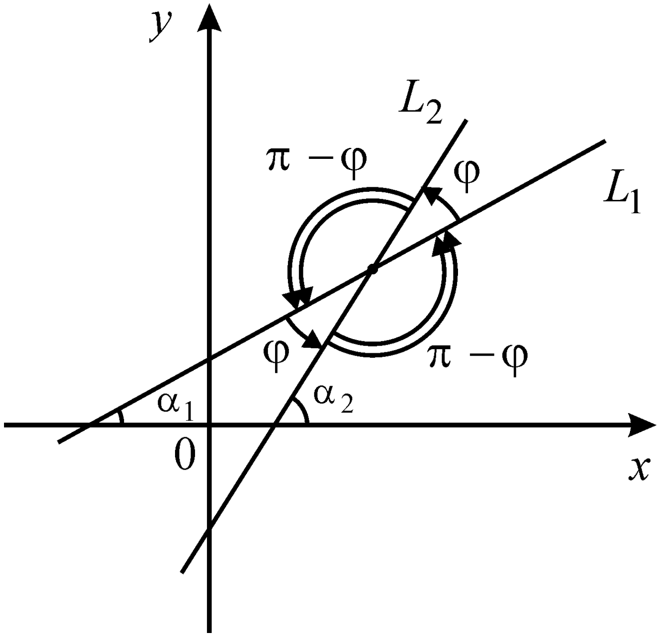
Отложим на осях Ox и Oy отрезки $a = 4;\quad b = 8$ и проведем прямую через точки $M_1(4;0)$ и $M_2(0;8)$.

Угол между двумя прямыми

Пусть заданы прямые L_1 и L_2 уравнениями:

$y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, где $k_1 = tg\alpha_1$, $k_2 = tg\alpha_2$.

При пересечении двух прямых L_1 и L_2 на плоскости образуются четыре угла, которые попарно равны между собой как вертикальные углы.



Определим угол между прямыми: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$.

Тогда $tg\varphi = tg\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \dfrac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$

Так как $tg\alpha_1 = k_1$, $tg\alpha_2 = k_2$, то отсюда следует, что

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \qquad (7)$$

(7) – определяет один из углов между двумя прямыми.

Второй угол равен $\pi - \varphi$.

Пример: Две прямые заданы уравнениями: $y = -2x + 3$, $y = 3x + 6$. Найти угол между этими прямыми.

Решение:

Воспользуемся формулой (7): $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Так как $k_1 = -2,\ k_2 = 3$, то $tg\varphi = \dfrac{3-(-2)}{1+3\cdot(-2)} = \dfrac{5}{-5} = -1.$

Отсюда $\varphi = arctg(tg\varphi) = arctg(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

Знак «–» указывает на то, что отсчет от первой прямой ко второй совершался по ходу часовой стрелки.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и

$tg\varphi = 0$, то есть $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 0$ или $k_2 = k_1$ (8)

(8) – условие параллельности двух прямых.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

то есть $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1$

$$tg\alpha_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$$

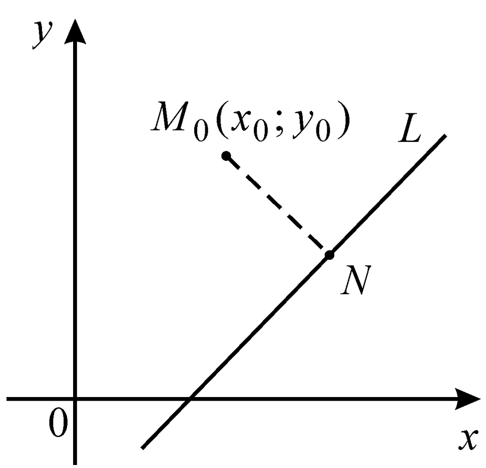
$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \qquad (9)$$

(9) – условие перпендикулярности двух прямых.

Расстояние от точки до прямой

Пусть на плоскости Oxy задана прямая L общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Требуется найти расстояние от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой L. Под расстоянием от точки до прямой понимают длину перпендикуляра, опускаемого из точки на прямую.



$$d = |M_0N| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (10)$$

(10) – формула расстояния от точки M_0 до прямой L.

Пример: Определить расстояние от точки $M(1;-4)$ до прямой $y=\dfrac{4}{3}x-4.$

Решение:

Воспользуемся формулой (10): $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$

Приведем уравнение прямой к общему виду, для этого умножим уравнение на 3 и все перенесем в левую часть:

$$3y=4x-12,\quad -4x+3y+12=0.$$

$$d=\frac{|-4\cdot 1+3\cdot(-4)+12|}{\sqrt{(-4)^2+3^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}=0{,}8.$$

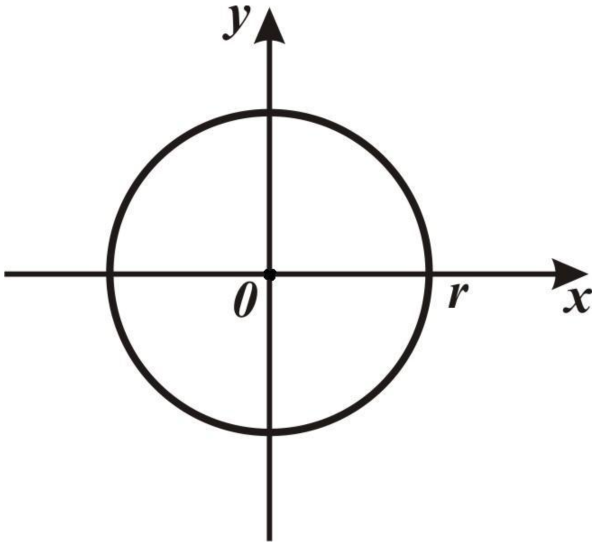
Кривые второго порядка

Окружность

Определение: *Окружностью* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра окружности).

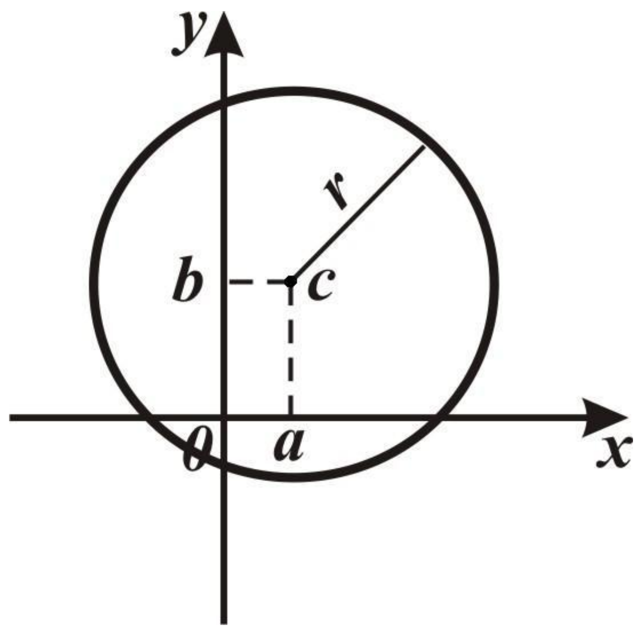
Если центр окружности совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad (1)$$



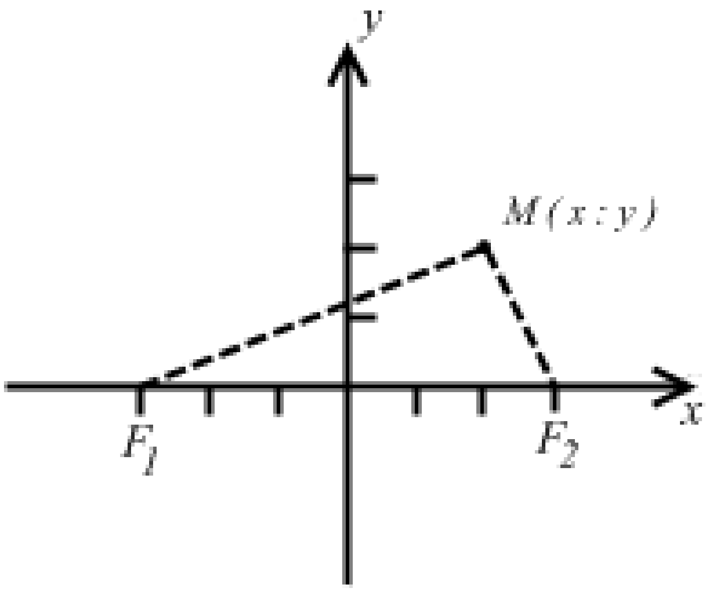
Если r – радиус окружности, а точка $C(a;\ b)$ – ее центр, то каноническое уравнение окружности имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (2)$$



Эллипс

Определение: *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между двумя фокусами.

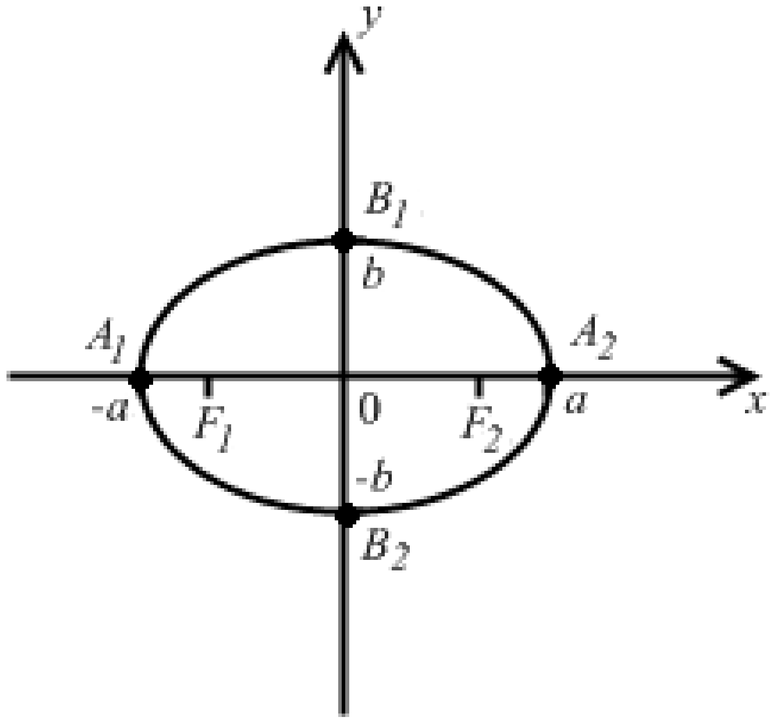


По определению $MF_1 + MF_2 = 2a$, $F_1F_2 = 2c$ и, следовательно, $2a > 2c$ или $a > c$. Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$ (4), a – длина большой полуоси эллипса, b – длина малой полуоси эллипса ($a > b$), c – половина расстояния между фокусами.

Оси координат являются *осями симметрии эллипса*.



$\left|A_1A_2\right| = 2a$ – длина большой оси эллипса,

$\left|B_1B_2\right| = 2b$ – длина малой оси эллипса,

O – центр эллипса,

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;b),\ B_2(0;-b)$ – вершины эллипса,

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ – фокусы эллипса.

Определение: *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение половины расстояния между фокусами к длине большой полуоси эллипса: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ (5).

Так как $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$.

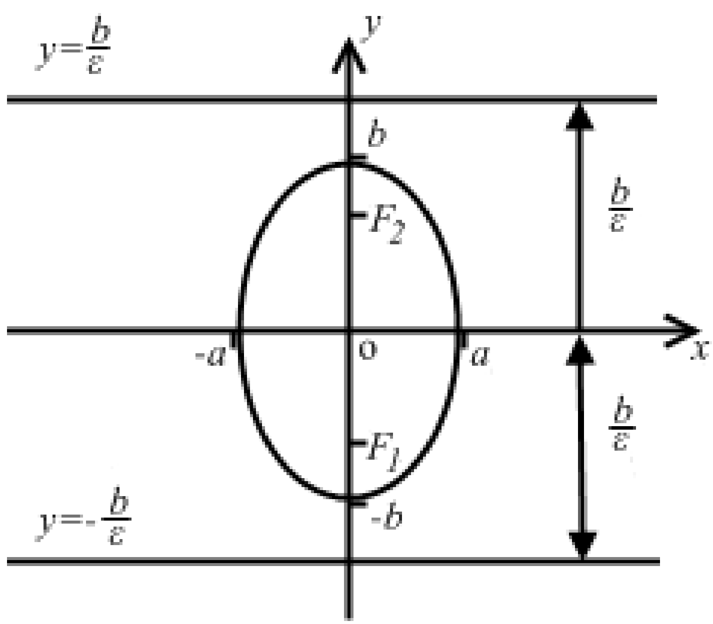
Чем больше эксцентриситет, тем больше расстояние от центра эллипса до его фокусов и тем более «сплющен» эллипс; чем ближе эксцентриситет к 0, тем больше форма эллипса приближается к окружности.

При $a = b$ эллипс преобразуется в окружность, тогда $c = 0$ и, следовательно, $\varepsilon = 0$. Если $\varepsilon = 1$, эллипс преобразуется в свою сдвоенную большую ось.

При $b > a$ эллипс расположен вдоль оси Oy. В этом случае оси Ox и Oy поменялись местами: большая ось и фокусы такого эллипса лежат на оси Oy, а малая ось на оси Ox.

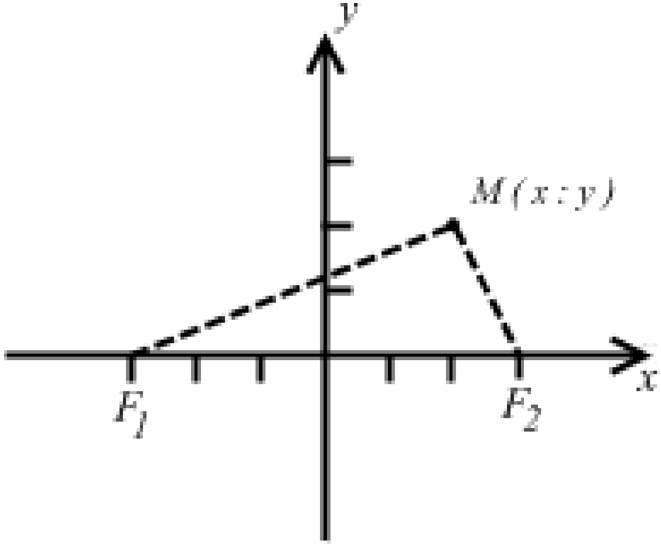
Для такого эллипса: $c^2 = b^2 - a^2, \quad \varepsilon = \dfrac{c}{b};$

$F_1(0; -c), \quad F_2(0; c)$ – координаты фокусов;



Гипербола

Определение: *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между двумя фокусами.



По определению $|MF_1 - MF_2| = 2a$, $F_1F_2 = 2c$ и, следовательно, $2a < 2c$ или $a < c$. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

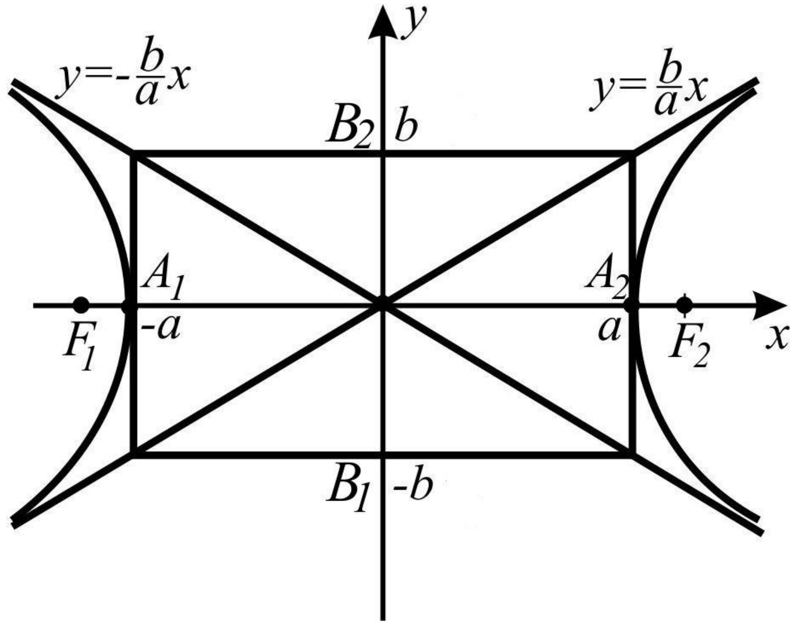
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (6)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$ (7), a – длина действительной полуоси гиперболы, b – длина мнимой полуоси гиперболы, c – половина расстояния между фокусами.

Для построения гиперболы необходимо сначала построить осевой прямоугольник, затем провести диагонали этого прямоугольника, которые являются асимптотами гиперболы.

В силу симметрии гиперболы, она имеет две асимптоты: $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$. Наличие асимптот и симметрии позволяют построить всю гиперболу.

Кривая состоит из двух не смыкающихся ветвей, лежащих в углах между асимптотами $y = \pm\frac{b}{a}x$ (8), и неограниченно приближающихся к этим прямым.



$|A_1A_2| = 2a$ – длина действительной оси гиперболы,

$|B_1B_2| = 2b$ – длина мнимой оси гиперболы,

O – центр гиперболы,

$A_1(-a;0),\ A_2(a;0),\ B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$ – вершины гиперболы,

$F_1(-c;0),\ F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы.

Определение: *Эксцентриситетом гиперболы* называется отношение половины расстояния между фокусами к длине действительной полуоси гиперболы: $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ (9).

Так как $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

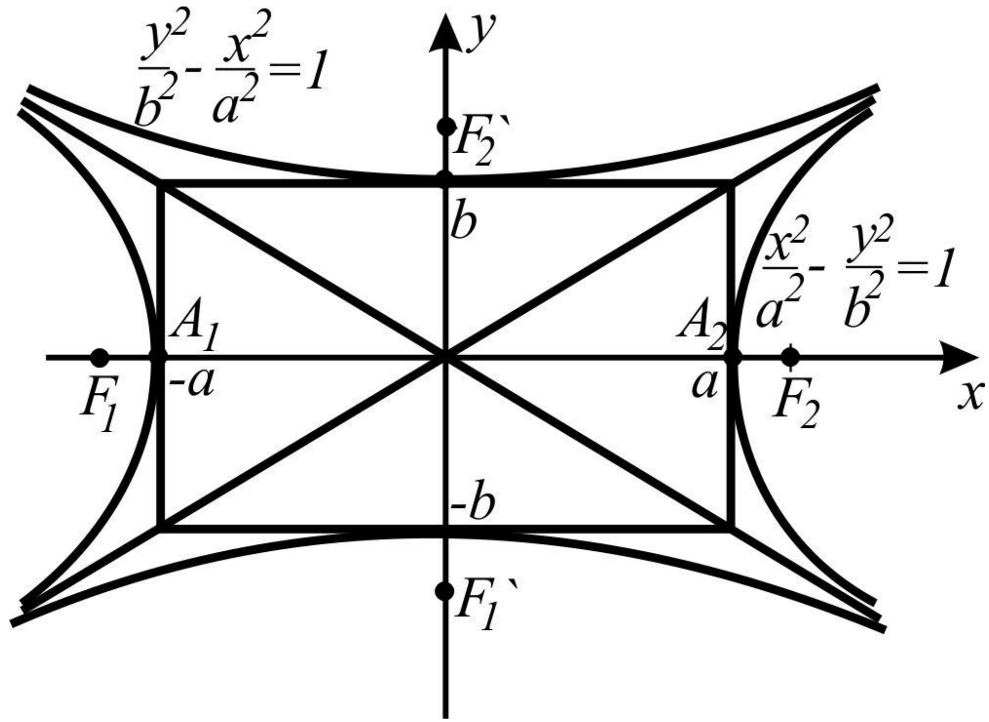
Если $a = b$, то гипербола называется *равнобочной* и ее асимптоты образуют прямой угол. Уравнение равнобочной гиперболы имеет вид:

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (10)$$

Определение: Две гиперболы, у которых оси совпадают и равны, но действительная ось одной из них служит мнимой осью другой, и наоборот, называются *сопряженными гиперболами*.

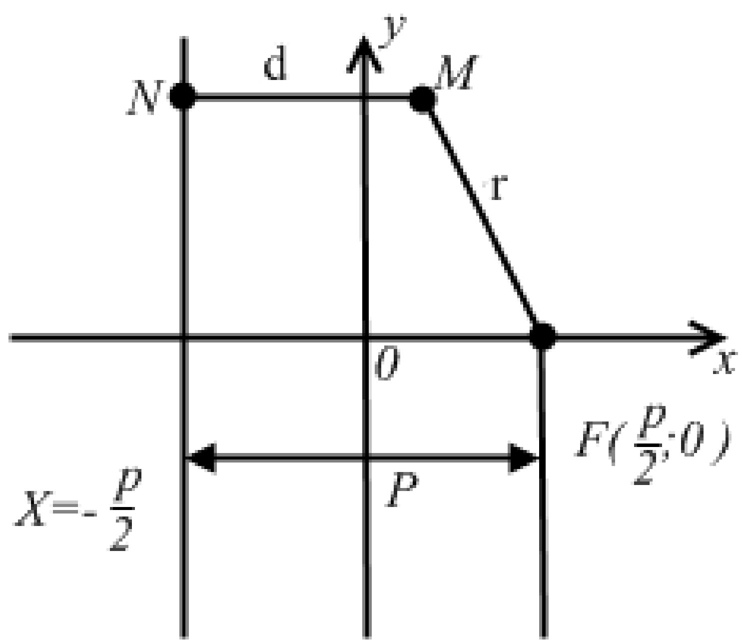
Если уравнение одной из сопряженных гипербол $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то уравнение второй $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$

Асимптоты сопряженных гипербол совпадают, а сами гиперболы расположены в смежных углах между асимптотами.



Парабола

Определение: *Параболой* называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.



Согласно определению точка M будет лежать на параболе, когда $r = d$, где r – расстояние от точки до фокуса, d – расстояние от точки до директрисы.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

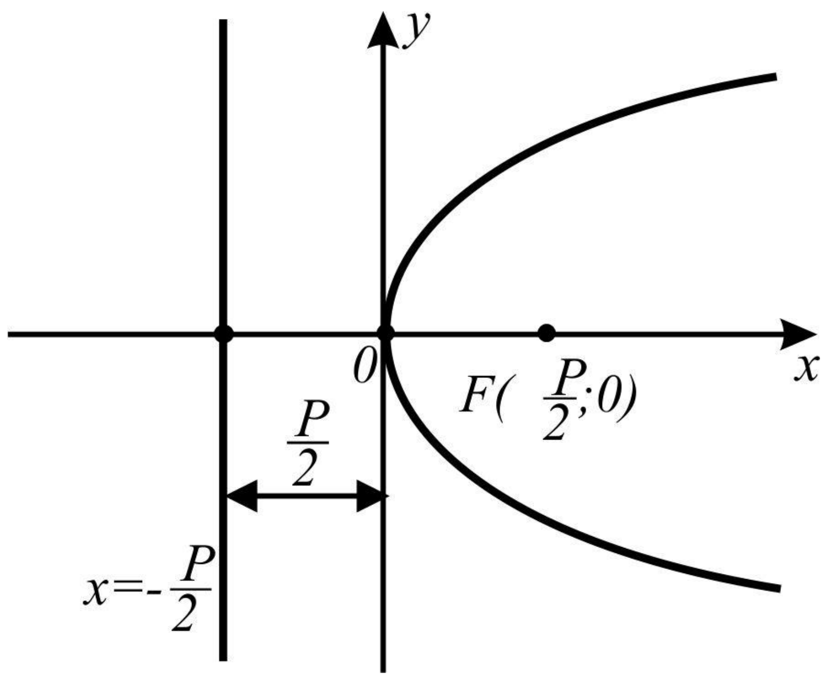
$$y^2 = 2px, \quad p > 0 \qquad (11)$$

где p – параметр параболы (расстояние от фокуса до директрисы).

Параметр параболы характеризует ширину области ограниченной параболой. Чем больше p, тем шире распахнуты ветви параболы.

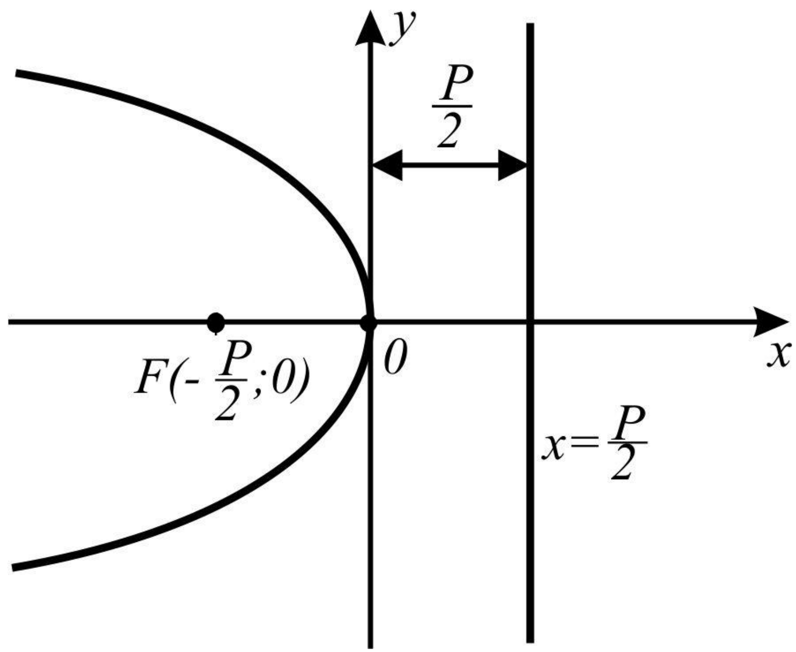
Парабола $y^2 = 2px,\ p > 0$ расположена симметрично относительно оси Ox , ветви направлены вправо.

Директрисой параболы является прямая $x = -\frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Вершина такой параболы находится в начале координат $O(0;0)$.



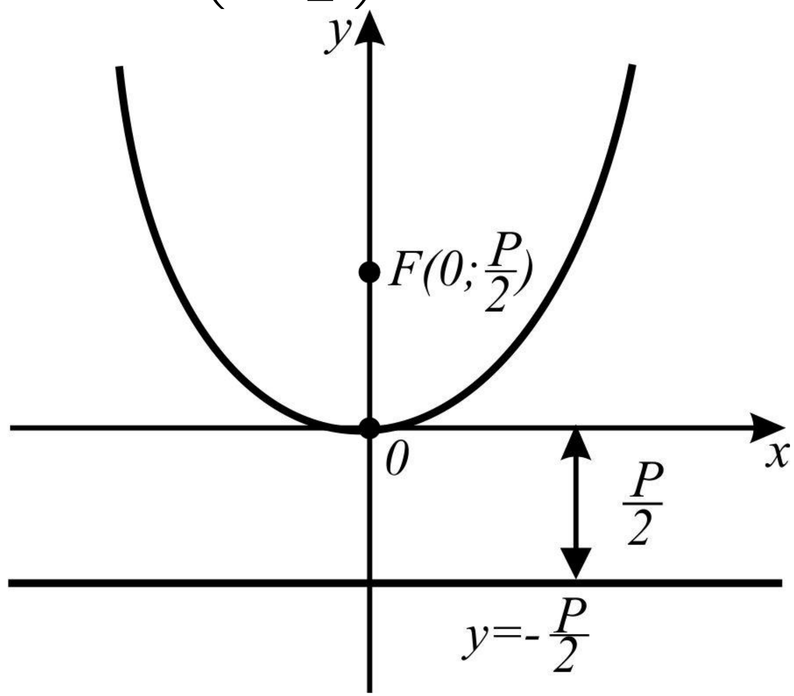
Парабола $y^2 = -2px,\ p > 0$, расположена симметрично относительно оси Ox , ветви направлены влево.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $x = \frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$.



Парабола $x^2 = 2py,\ p > 0$, расположена симметрично относительно оси Oy , ветви направлены вверх.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $y = -\dfrac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;\dfrac{p}{2}\right)$.



Парабола $x^2=-2py$, $p>0$, расположена симметрично относительно оси Oy , ветви направлены вниз.

Вершина параболы находится в точке $O(0;0)$. Директрисой параболы является прямая $y=\dfrac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;-\dfrac{p}{2}\right)$.